Introduction
Définition
Système dynamique
Rectangles
Directions
Périodicité
Pavages
Polygones
Construction de billards
Cercle
Système polaire
Périodicité
Densité
Ellipses
Autres formes
Obstacles
Théorie du chaos

Les billards mathématiques

Claire Muller   Wim Poignon   Agnès Totschnig

Lycée français de Berlin

Encadrant : Julian Adam Kern

Introduction
Définition
Système dynamique
Rectangles
Directions
Périodicité
Pavages
Polygones
Construction de billards
Cercle
Système polaire
Périodicité
Densité
Ellipses
Autres formes
Obstacles
Théorie du chaos

Introduction

Question

Avez-vous déjà joué au billard ?

Credit: *https ://www.defaistre.com/products/billard-prestige*

Introduction
- **Définition**
- Système dynamique

Rectangles
- Directions
- Périodicité
- Pavages

Polygones
- Construction de billards

Cercle
- Système polaire
- Périodicité
- Densité

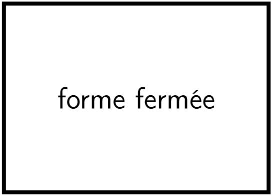
Ellipses

Autres formes
- Obstacles
- Théorie du chaos

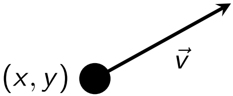
Introduction

Définition du billard mathématique

Le billard



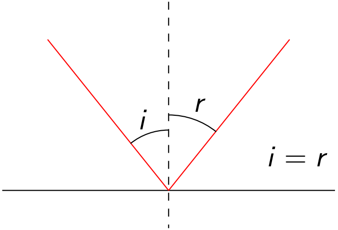
La boule



Introduction
Définition
Système dynamique
Rectangles
Directions
Périodicité
Pavages
Polygones
Construction de billards
Cercle
Système polaire
Périodicité
Densité
Ellipses
Autres formes
Obstacles
Théorie du chaos

Lois du mouvement (optique géométrique)

- en ligne droite
- sans frottements
- rebond aux bords



Introduction
Définition
Système dynamique
Rectangles
Directions
Périodicité
Pavages
Polygones
Construction de billards
Cercle
Système polaire
Périodicité
Densité
Ellipses
Autres formes
Obstacles
Théorie du chaos

Introduction

Les systèmes dynamiques

Définition d'un système dynamique

$$\text{Système dynamique } = \{ \text{ Système ; Lois d'évolution } \}$$

Problème

Comment passer de la loi ponctuelle à l'évolution à long terme de la trajectoire de la bille ?

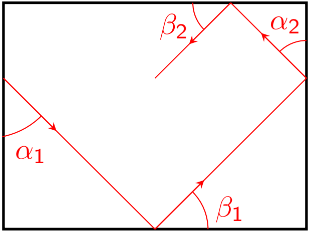
Introduction
Définition
Système dynamique
Rectangles
Directions
Périodicité
Pavages
Polygones
Construction de billards
Cercle
Système polaire
Périodicité
Densité
Ellipses
Autres formes
Obstacles
Théorie du chaos

Les rectangles

Les divers directions

Question

Quelles sont les directions possibles de la boule ?



$$\beta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$$

$$\alpha_2 = -\alpha_1$$

$$\beta_2 = -\beta_1$$

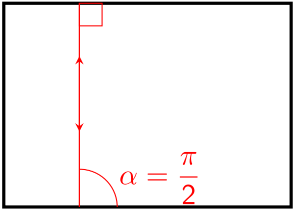
Les rectangles

Périodicité

Définition

Trajectoire périodique : trajectoire qui repasse par le point initial dans la direction initiale.

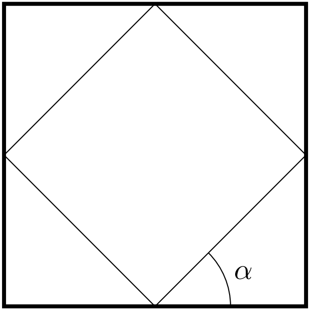
Exemple



Période : $T = 2$

Les rectangles
Périodicité

Le carré avec $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

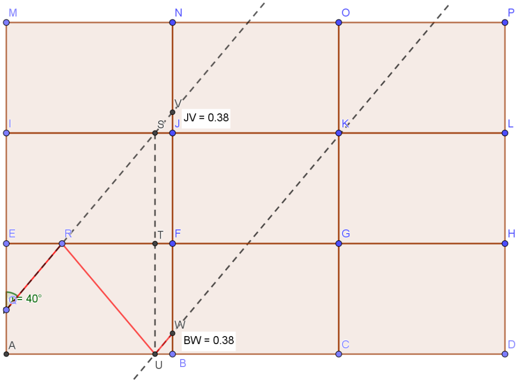


Les rectangles

Construction de trajectoires

Nouvelle Méthode

Construire le symétrique du billard.



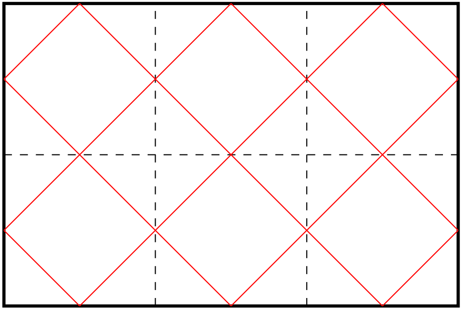
Introduction
Définition
Système dynamique
Rectangles
Directions
Périodicité
Pavages
Polygones
Construction de billards
Cercle
Système polaire
Périodicité
Densité
Ellipses
Autres formes
Obstacles
Théorie du chaos

Les Rectangles

Pavages

Question

Est-ce qu'on peut généraliser cette trajectoire à tous les rectangles ?



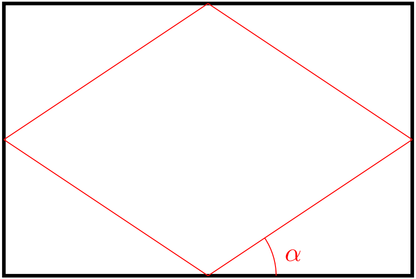
Introduction
Définition
Système dynamique
Rectangles
Directions
Périodicité
Pavages
Polygones
Construction de billards
Cercle
Système polaire
Périodicité
Densité
Ellipses
Autres formes
Obstacles
Théorie du chaos

Les rectangles

Et les irrationnels ?

Question

Existe-t-il une trajectoire périodique pour les rectangles au rapport irrationnel ?



$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{l}{L}\right)$$

Introduction
Définition
Système dynamique
Rectangles
Directions
Périodicité
Pavages
Polygones
Construction de billards
Cercle
Système polaire
Périodicité
Densité
Ellipses
Autres formes
Obstacles
Théorie du chaos

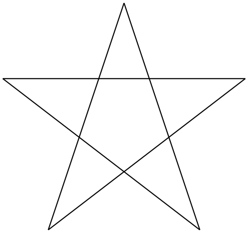
Les polygones

Restriction de l'ensemble d'étude

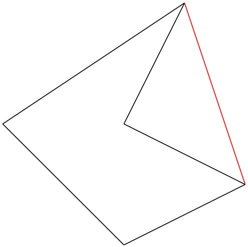
Polygone régulier

Un polygone régulier est à la fois équilatéral et équiangle.

Polygone croisé



Polygone non convexe

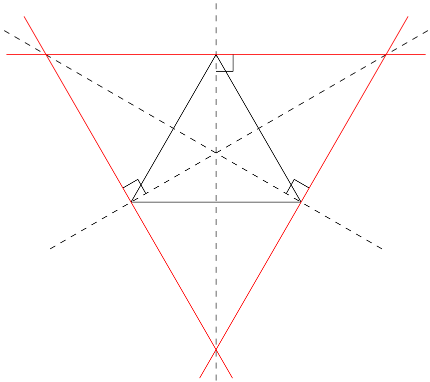


Les polygones
Construction de billards

Problème réciproque

Quel billard convient à une trajectoire périodique polygonale ?

Exemple avec $n = 3$

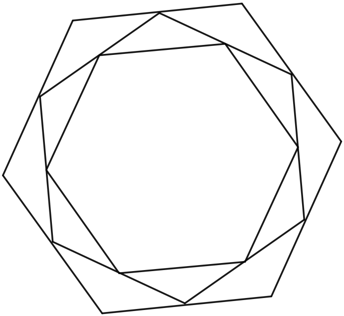


Les polygones

Construction de billards

Généralisation

Pour tous les polygones, le billard est le même que la trajectoire en plus grand et décalé de $\frac{\pi}{n}$.



Les billards mathématiques

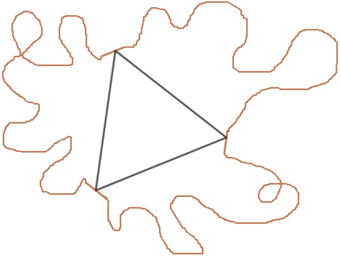
Claire Muller, Wim Poignon, Agnès Totschnig

Introduction
Définition
Système dynamique
Rectangles
Directions
Périodicité
Pavages
Polygones
Construction de billards
Cercle
Système polaire
Périodicité
Densité
Ellipses
Autres formes
Obstacles
Théorie du chaos

Question

Existe-t-il d'autres billards qui conviennent ?

Exemple très exotique



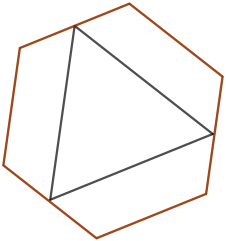
Condition nécessaire et suffisante

Tangente au billard en chaque sommet du polygone est perpendiculaire à la bissectrice.

Les polygones
Construction de billards

Question
Existe-t-il d'autres billards qui conviennent ?

D'autres polygones

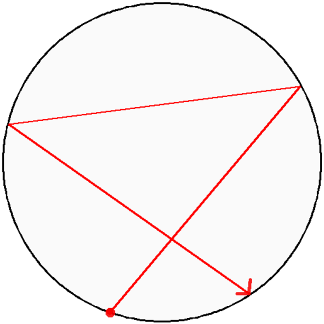


Condition suffisante
Polygone régulier avec un nombre multiple de côtés.

Le cercle

Question

Quelles sont les trajectoires possibles dans un cercle ?

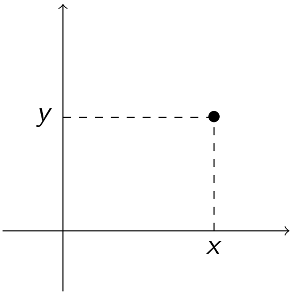


Introduction
Définition
Système dynamique
Rectangles
Directions
Périodicité
Pavages
Polygones
Construction de billards
Cercle
Système polaire
Périodicité
Densité
Ellipses
Autres formes
Obstacles
Théorie du chaos

Le cercle

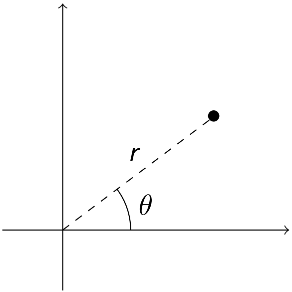
Le système de coordonées polaires

Coordonnées cartésiennes



(x, y)

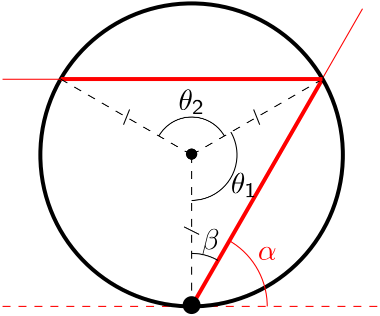
Coordonnées polaires



(r, θ)

Le cercle
Suite des positions de rebond

Position du premier rebond



On pose :

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

On en déduit :

$$\theta_1 = \pi - 2\beta$$
$$= 2 \cdot \alpha$$

Généralisation

$$\theta_n = 2n \cdot \alpha$$

Introduction
Définition
Système dynamique
Rectangles
Directions
Périodicité
Pavages
Polygones
Construction de billards
Cercle
Système polaire
Périodicité
Densité
Ellipses
Autres formes
Obstacles
Théorie du chaos

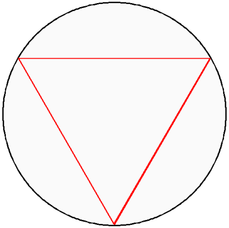
Le cercle

Périodicité d'une trajectoire

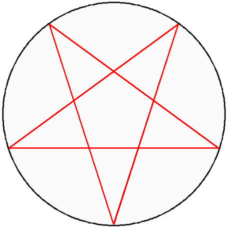
Question

Quelles sont les trajectoires périodiques dans le cercle ?

Exemple avec $T = 3$



Exemple avec $T = 5$



Condition nécessaire et suffisante

$$\exists k \in \mathbb{N}^\star, k \cdot 2\alpha \equiv 0 \ [2\pi] \Leftrightarrow \alpha = \frac{k'}{k} \cdot \pi$$

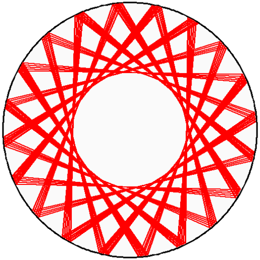
Le cercle

Densité d'une trajectoire

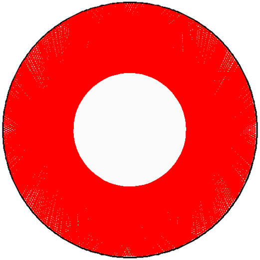
Question

Et les trajectoires apériodiques couvrent-elles le disque entier ?

Exemple après 100 rebonds



... et après 500 rebonds

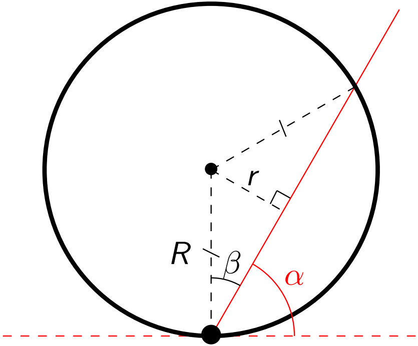


Le cercle

Les courbes enveloppes

Définition

La courbe enveloppe d'une famille de courbes est tangente à chacune des courbes.

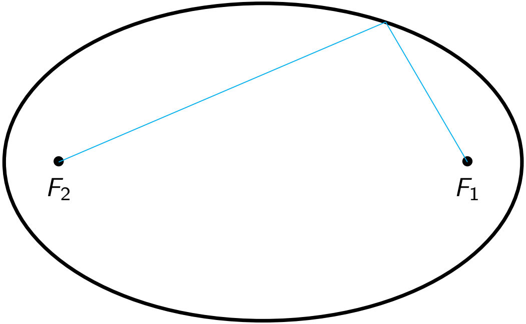


$$
\begin{aligned}
r &= R \cdot \sin \beta \\
  &= R \cdot \cos \alpha
\end{aligned}
$$

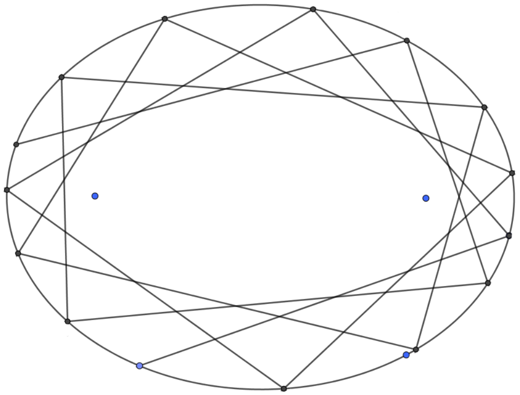
Introduction
Définition
Système dynamique
Rectangles
Directions
Périodicité
Pavages
Polygones
Construction de billards
Cercle
Système polaire
Périodicité
Densité
Ellipses
Autres formes
Obstacles
Théorie du chaos

Les ellipses
Définition

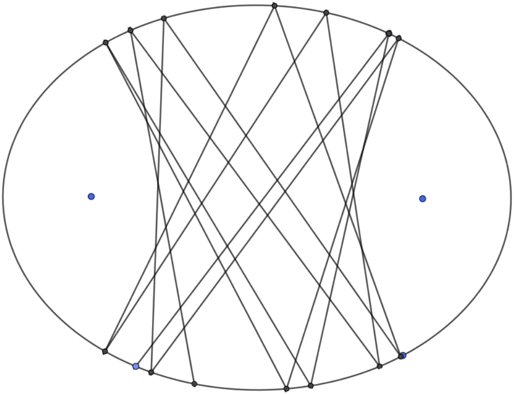
Définition
Une ellipse est l'ensemble des points dont la somme des distances à deux points fixes, dits foyers, est constante.



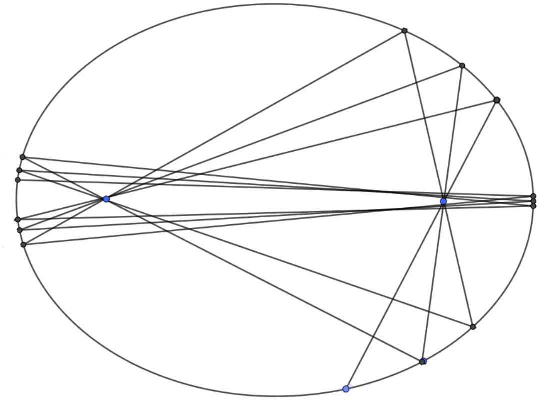
Cas 1 : À l'extérieur des foyers



Cas 2 : À l'intérieur des foyers



Cas 3 : Passant par les foyers

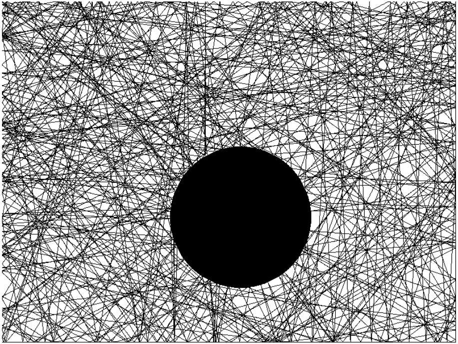


Introduction
Définition
Système dynamique
Rectangles
Directions
Périodicité
Pavages
Polygones
Construction de billards
Cercle
Système polaire
Périodicité
Densité
Ellipses
Autres formes
Obstacles
Théorie du chaos

Et encore d'autres billards...

Les obstacles

Et si on ajoutait des obstacles à l'intérieur du billard ?



Introduction
Définition
Système dynamique
Rectangles
Directions
Périodicité
Pavages
Polygones
Construction de billards
Cercle
Système polaire
Périodicité
Densité
Ellipses
Autres formes
Obstacles
Théorie du chaos

Et encore d'autres billards...

La théorie du chaos

Une toute petite variation des conditions initiales et ... toute la trajectoire change.

Ouverture

Existe-t-il une approche déterministe pour ces billards ?